3.Soit D la partie du plan limitée par (C_f) ;(C_f^{-1}) ;[AB] et [AC] où $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);B\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $C\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\right)$. Soit A l'aire, en unité d'aire, de D. Montrer que $A=2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\frac{3}{4}$

B- 1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ où $n\in\mathbb{N}$.

2. Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}\ on\ a:\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=-\sum_{k=0}^{n}u_k+\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx \quad avec\ u_k=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^k\ln(x)dx$.

3. Calculer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\ on\ a: x^{n+1}\le\frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}\le 2\ln 2.x^{n+1}$

5. Déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx=0$ 6.En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\left[-\sum_{k=0}^{n}u_k\right]=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

<u>Exercice N°13</u> A- Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1.Soit $h\in]0,+\infty[$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g:x\mapsto\left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]x^2-\ln(1+x)+x$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel : $c\in]0,h[$ tel que : $\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\frac{-1}{2(c+1)}$.

b) Prouver donc que : $\lim_{h\to0^+}\left(\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right)=\frac{-1}{2}$ c) Prouver enfin que f est dérivable à droite en 0 et que : $f_d'(0)=-\frac{1}{2}$.

2. a) Justifier que : $\forall x\ge0:\int_0^x\frac{dt}{(1+t)^2}\le\int_0^x\frac{dt}{1+t}$ b) Déduire que $\forall x\ge0:\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\le0$.

c) Donner enfin le signe de f'(x) pour tout x > 0.

3. Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

B- Pour tout $a\in]0,1]$, on pose : $u_n=\int_0^a t^n f(t)\,dt$.

1.Etudier la monotonie de la suite (u_n). 2. Prouver que (u_n) est convergente.

3.a) Montrer que pour tout $x\ge0$; $f(x)\le1$. b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},on\ a:u_n\le\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

c) Préciser donc $\lim_{n\to+\infty} u_n$

<u>Exercice N°14 :</u>Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx\ et\ V_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{(-1)^n}{n+1}$

1.a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0\le U_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$ puis calculer sa limite.

b) Calculer $\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$ puis calculer U_1.

2. On pose $S_n=1-x+x^2+....+(-1)^n x^n\ avec\ n\in\mathbb{N}^*\ et\ x\in[0;1]$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...